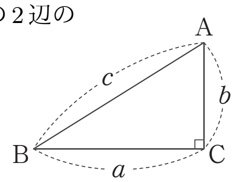
三平方の定理の証明

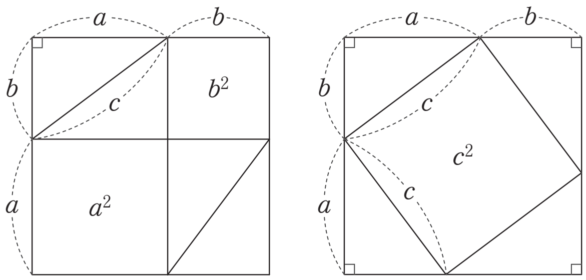
このプリントでは，**三平方の定理**の証明法をいくつかご紹介します．まず，三平方の定理とは次の定理です：

> **定理**（三平方の定理）
> 直角三角形の斜辺の2乗は，他の2辺の2乗の和に等しい．
> すなわち，右の図において，
> $$a^2+b^2=c^2$$
> が成り立つ．



三平方の定理の証明法は数多く知られています（350種類以上あると言われていて，今もなお増え続けています！）三平方の定理は「ピタゴラスの定理」とも呼ばれています．ピタゴラスは古代ギリシャの数学者です．三平方の定理そのものは紀元前1800年頃にはすでに知られていましたが，ピタゴラスはそれを初めて証明しました．ピタゴラスの証明は次のようなものであったと考えられています．

【証明１】下の図のように，1辺の長さが$a+b$の正方形を2通りの方法で分割する．



このとき，正方形の内部で，4つの直角三角形を除いた部分の面積は一致するので，

$$a^2+b^2=c^2$$

を得る．■

上の右側の図を利用すると，次のような，式の展開の計算による証明が得られます．これは多くの中学数学の教科書で採用されている方法です．

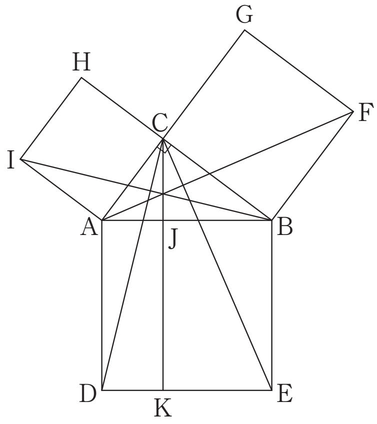
【証明２】1辺の長さがcの正方形の面積は，1辺の長さが$a+b$の正方形の面積から直角三角形4つの面積を引いたものなので，

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2-\frac{1}{2}ab\times 4 \\ &= a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2 \end{aligned}$$

を得る．■

次に紹介するのは，ユークリッドの『原論』に載っている証明です．ユークリッド（エウクレイデスとも呼ばれている）は紀元前300年頃アレクサンドリアで活躍した数学者です．彼が書いた『原論』は古代ギリシャ数学の集大成ともいえる書物で，その後の数学研究にも大きな影響を与えました．

【証明３】下の図のように，正方形ADEB，正方形GCBF，正方形HIACをとる．点Cを通りADに平行な直線とABとの交点をJ，DEとの交点をKとする．



$\triangle$ADCと$\triangle$ABIにおいて，AD＝AB，AC＝AIかつ，

$$\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{CAB}+90^\circ=\angle \mathrm{IAB}$$

より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle \mathrm{ADC}\equiv\triangle \mathrm{ABI}$$

である．AD // CKより，長方形ADKJの面積は$\triangle$ADCの面積の2倍である．AI // BHより，正方形HIACの面積は$\triangle$IABの面積の2倍である．よって，

（長方形ADKJの面積）＝（正方形HIACの面積）

である．同様にして，$\triangle$BCE $\equiv$ $\triangle$BFAより，

（長方形JKEBの面積）＝（正方形GCBFの面積）

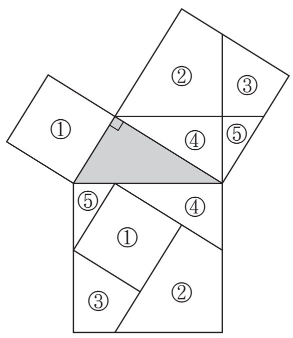
も得られる．よって，

（正方形ADEB）＝（長方形ADKJ）＋（長方形JKEB）
＝（正方形HIAC）＋（正方形GCBF）

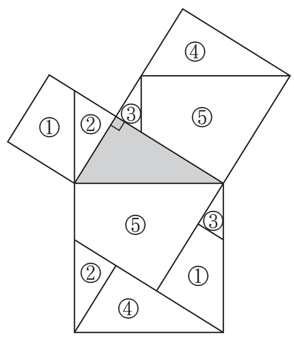
すなわち，$c^2=b^2+a^2$を得る．■

証明３のように，直角三角形の斜辺を1辺とする正方形の面積が，直角をはさむ2辺をそれぞれ1辺とする正方形の面積の和と一致することを示せば，三平方の定理が証明できたことになります．この考え方を利用し，正方形を上手に分割して並べ替えることで面積が等しくなることを示す方法を4つ紹介します．同様に，正方形を分割して並べ替える証明は，他にもたくさんの方法が知られています．

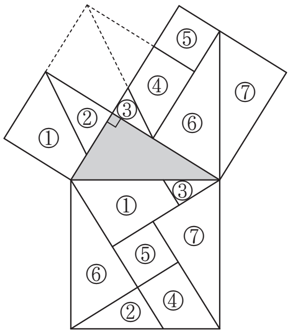
【証明４】



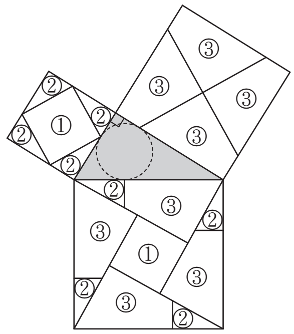
【証明５】



【証明６】

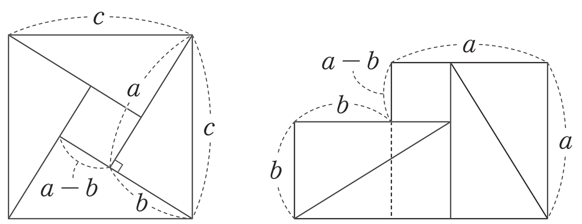


【証明７】



次に紹介するのは，12世紀に活躍したインドの数学者バースカラによる証明です．

【証明８】下左図のように，直角三角形４つを並べると，１辺の長さcの正方形の内部に１辺の長さ$a-b$の正方形ができる．この図形を下右図のように並べ替えると，１辺の長さがcの正方形の面積は，１辺の長さがそれぞれaとbの正方形の面積の和と等しいと分かる．■



証明２と同様に，上の左側の図から，計算によって証明することもできます．この方法も中学校の数学の教科書に載っていることが多いです．

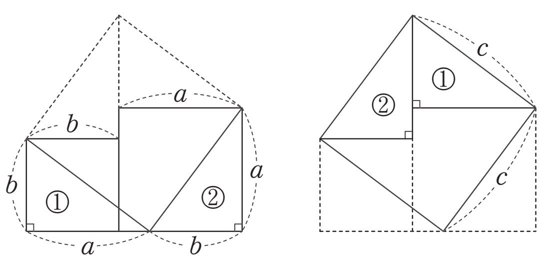
【証明９】１辺の長さがcの正方形の面積は，１辺の長さが$a-b$正方形の面積に直角三角形４つの面積を加えたものなので，

$$\begin{aligned} c^2 &= (a-b)^2 + \frac{1}{2}ab \times 4 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

を得る．■

日本人による証明もあります．次は江戸時代中期に活躍した数学者・建部賢弘（たけべかたひろ）による証明です．

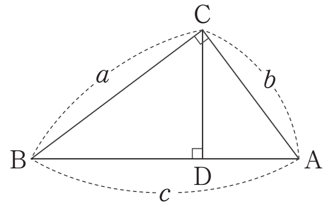
【証明10】下の図のように，１辺の長さがaの正方形と１辺の長さがbの正方形を合わせた図形において，２つの直角三角形①と②を平行移動すると，１辺の長さがcの正方形が得られる．■



この証明10は，証明５と本質的には同じですね．

相似比を利用した証明法もあります．広く知られている方法で，前に登場したピタゴラスやバースカラも同様の証明を得ていたとされています．

【証明11】下の図のように，頂点Cから斜辺ABに下ろした垂線の足をDとする．



$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{CBD}$より，

$$\mathrm{BC} : \mathrm{BD} = \mathrm{AB} : \mathrm{CB} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{BD} = \frac{a^2}{c}$$

である．$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{ACD}$より，

$$\mathrm{AC} : \mathrm{AD} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{AD} = \frac{b^2}{c}$$

である．よって，

$$c = \mathrm{AB} = \mathrm{BD} + \mathrm{AD} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$$

すなわち，$c^2 = a^2 + b^2$を得る．■

面積比を利用しても証明できます．これは相対性理論で知られる物理学者アインシュタインが発見した方法です．

【証明12】証明11と同じ図において，

$$\triangle \mathrm{CBD} \backsim \triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であり，

$$相似比\, a : b : c \qquad \Longrightarrow \qquad 面積比\, a^2 : b^2 : c^2$$

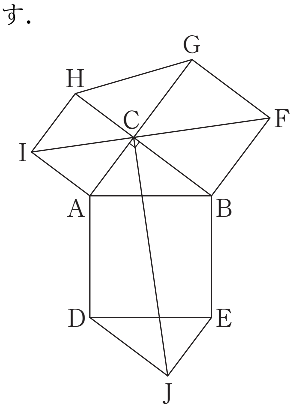
である．よって，$\triangle \mathrm{CBD}$の面積をS_1，$\triangle \mathrm{ACD}$の面積をS_2，$\triangle \mathrm{ABC}$の面積をS_3とすると，S_1，S_2，S_3は，正の定数kを用いて，

$$S_1 = ka^2, \qquad S_2 = kb^2, \qquad S_3 = kc^2$$

と表される．$S_1 + S_2 = S_3$より，$ka^2 + kb^2 = kc^2$であり，両辺をkで割って，$a^2 + b^2 = c^2$を得る．■

数学者以外も証明を発見しています．次の証明は「最後の晩餐（ばんさん）」や「モナ・リザ」で有名なイタリアの芸術家レオナルド・ダ・ヴィンチが与えたものです．

【証明13】右の図のように，直角三角形ABCの外側に，正方形ADEB，正方形GCBF，正方形HIACをとる．このとき，３点I，C，Fは一直線上にあり，四角形IABFと四角形IHGFは，直線IFに関して線対称である．AC // JE，BC // JDとなるように点Jをとると，



$$四角形\mathrm{CADJ} \equiv 四角形\mathrm{JEBC}$$

が成り立つ．さらに，

$$\mathrm{IA} = \mathrm{CA}, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AD}, \quad \mathrm{BF} = \mathrm{DJ},$$

$$\angle \mathrm{IAB} = \angle \mathrm{CAD}, \quad \angle \mathrm{ABF} = \angle \mathrm{ADJ}$$

より，四角形IABFを点Aを中心に時計回りに90°回転させたものが四角形CADJであると分かる．以上のことから，六角形IABFGHと六角形CADJEBの面積は等しい．

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{HGC} \equiv \triangle \mathrm{EDJ}$$

より，六角形IABFGHから△ABCと△HGCを除いた，正方形HIACと正方形GCBFの面積の和は，六角形CADJEBから△ABCと△EDJを除いた，正方形ADEBの面積と等しい．これは，$a^2+b^2=c^2$を意味する．■

なんと，アメリカ大統領も証明を残しています！次に紹介するのは，第20代アメリカ合衆国大統領ガーフィールドによる証明です．

【証明14】下の図のように，直角三角形ABCと合同な直角三角形BEDを，CDが一直線になるようにとる．このとき，四角形CAEDはCA // DEの台形であり，その面積は，

$$\frac{1}{2}(a+b)\times(a+b)=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2) \quad \cdots\cdots①$$

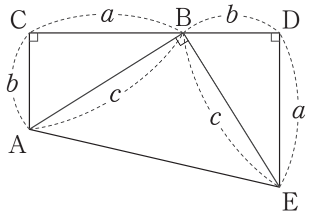
である．また，三角形BAEはBA＝BEの直角二等辺三角形であるので，台形CAEDの面積を3つの直角三角形の面積の和として求めると，

$$\frac{1}{2}ab\times 2+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(2ab+c^2) \quad \cdots\cdots②$$

である．①＝②より，

$$\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\frac{1}{2}(2ab+c^2)$$

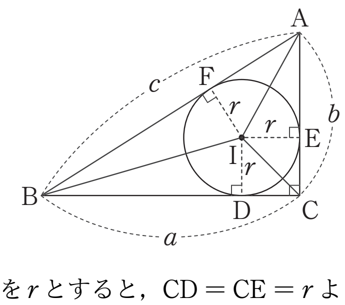
であり，整理すると，$a^2+b^2=c^2$を得る．■



証明14は**証明1**や**証明2**を，半分の面積で考えたものになっていますね．

続いて，円を用いた証明を2つご紹介しようと思います．まずは，内接円を利用するものです：

【証明15】下の図のように，直角三角形ABCの内接円の中心をIとし，接点をD，E，Fとする．



内接円の半径をrとすると，CD＝CE＝rより，

$$\begin{aligned} c=\mathrm{AB}&=\mathrm{AF}+\mathrm{BF}=\mathrm{AE}+\mathrm{BD} \\ &=(b-r)+(a-r)=a+b-2r \end{aligned}$$

であるので，$r=\frac{1}{2}(a+b-c)$と表される．また，

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{ABC}&=\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}+\triangle \mathrm{IAB} \\ &=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$

より，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

が成り立つ．よって，

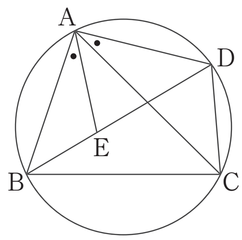
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot(a+b+c) \\ &=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-c^2\}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2) \end{aligned}$$

すなわち，$a^2+b^2=c^2$を得る．■

次は外接円に関連する証明です．外接円を直接用いるわけではありませんが，円に内接する四角形に関する定理を1つ紹介して，それを用いた証明を行います．もちろん高校以降で学習する内容を用いた証明も数多く知られています．今後，新しい図形の性質を学習したら，それを三平方の定理の証明に活かせないか考えるのも面白いと思います．

> 定理（トレミーの定理）
> 円に内接する四角形ABCDにおいて，
> $$\mathrm{AB}\times\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\times\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}$$
> が成り立つ．

【トレミーの定理の証明】



右図のように，円に内接する四角形ABCDの対角線BD上に，点Eを，∠BAE＝∠CADとなるようにとる．円周角の定理より，∠ABE＝∠ACDも成り立つので，

$$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{ACD}$$

である．よって，AB : AC＝BE : CDより，

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\times\mathrm{BE} \quad \cdots\cdots①$$

を得る．同様に，△AED ∽ △ABCより，

$$\mathrm{BC}\times\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\times\mathrm{ED} \quad \cdots\cdots②$$

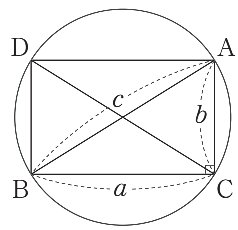
が得られる．①と②を足し合わせて，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}\times\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\times\mathrm{DA}&=\mathrm{AC}\times\mathrm{BE}+\mathrm{AC}\times\mathrm{ED} \\ &=\mathrm{AC}\times(\mathrm{BE}+\mathrm{ED})=\mathrm{AC}\times\mathrm{BD} \end{aligned}$$

を得る．■

トレミー定理を用いると，次のように簡単に三平方の定理が証明できてしまいます！

【証明16】右の図ように，四角形DBCAが長方形となるように点Dをとると，△ABC ≡ △BADである．長方形は円に内接するので，トレミーの定理が適用できる．



$$\mathrm{BC}\times\mathrm{AD}+\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\times\mathrm{CD}$$

に，BC＝AD＝a，AC＝BD＝b，AB＝CD＝cを代入すると，

$$a\times a+b\times b=c\times c$$

すなわち，$a^2+b^2=c^2$を得る．■

最後に紹介する証明は，2023年にアメリカの女子高生２人組ネキヤ・ジャクソンとカルシア・ジョンソンが発見した方法です．この方法は，△ABCが直角二等辺三角形のときには適用できないので，その場合は別に扱う必要があります．彼女たちの証明では「三角比」を用います．三角比による証明は，三角比の基本公式の証明の一部に三平方の定理を用いるものがあり，循環論法に陥りやすいとされていました．彼女たちは，慎重な議論でそれを回避し，発表された当時，その証明は大きな話題になりました．彼女たちが発表した論文では，他に４種類の証明と，別の証明を生み出すアイディアも紹介されています．

証明には，三角比の定義の他に「２倍角公式」や「級数」の知識も必要です．それらをまだ学習していない場合は，習得後に再び証明に挑んでみてください．

【証明１７】△ABCが直角二等辺三角形の場合を先に示す．$a=b$のとき，示すべき式は$a^2+a^2=2a^2=c^2$であるが，図１のように，直角二等辺三角形ABCを４つ並べると，１辺の長さがcの正方形となることから，

$$c^2=\frac{1}{2}a^2\times 4=2a^2$$

を得る．

図１

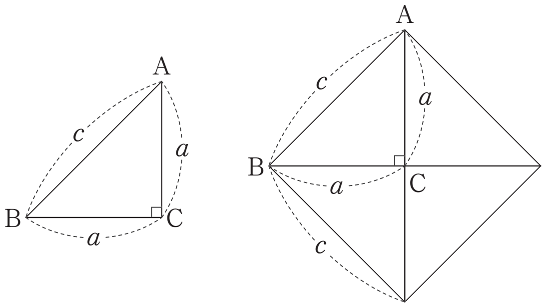
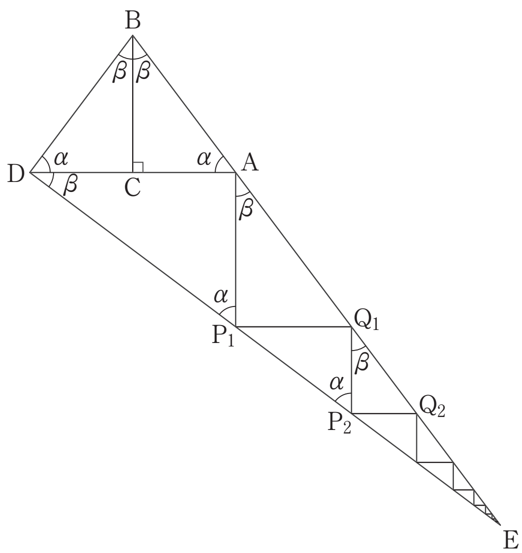


図２



次に一般の場合を示す．$\alpha=\angle\mathrm{BAC}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$とする．$\alpha>\beta$と仮定してよい．図２のように，直線BCに関して点Aと対称な点Dをとり，二等辺三角形BDAをつくる．さらに，BAの延長上に$\angle\mathrm{BDE}=90°$となるように点Eをとり，直角三角形BDEをつくる．

Aを通りBCと平行な直線とDEの交点をP_1，P_1を通りADと平行な直線とBEの交点をQ_1，Q_1を通りBCと平行な直線とDEの交点をP_2，P_2を通りADと平行な直線とBEの交点をQ_2，……と以下同様にP_3，Q_3，…をとる（Q_0は点Aを表すものとする）．

このとき，

$$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{P_1DA}\backsim\triangle\mathrm{Q_1AP_1}\backsim\triangle\mathrm{P_2P_1Q_1}$$
$$\backsim\triangle\mathrm{Q_2Q_1P_2}\backsim\triangle\mathrm{P_3P_2Q_2}\backsim\cdots\cdots$$

であるので，正の整数nに対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}&=\frac{c}{a}\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\\&=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n=\frac{b^2}{a^2}\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n\\&=\cdots=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^n\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^n\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\mathrm{AD}\\&=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^n\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot 2b=2c\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{BE}&=\mathrm{BA}+\mathrm{AQ}_1+\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2+\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3+\cdots\cdots\\&=c+2c\cdot\frac{b^2}{a^2}+2c\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2+2c\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\cdots\cdots\\&=c\left(1+\frac{2b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\right)=c\left(1+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\\&=\frac{c(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\end{aligned}$$

を得る．一方，

$$\begin{aligned}\mathrm{BE}&=\frac{\mathrm{BD}}{\cos\angle\mathrm{DBE}}=\frac{c}{\cos 2\beta}=\frac{c}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}\\&=\frac{c}{\dfrac{a^2}{c^2}-\dfrac{b^2}{c^2}}=\frac{c^3}{a^2-b^2}\end{aligned}$$

であるので，

$$\frac{c(a^2+b^2)}{a^2-b^2}=\frac{c^3}{a^2-b^2}$$

すなわち，$a^2+b^2=c^2$を得る．■

以上，三平方の定理の証明で，私が歴史的に重要だと思うもの，面白いと思うものを中心に17種類をご紹介しました．他の証明が気になる方は，参考文献に挙げた書物を調べたり，ネットで検索したりしてみてください．

大島学習塾　大島圭太

［参考文献］

［１］中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵 訳・解説『ユークリッド原論（縮刷版）』共立出版，2004年

［２］森下四郎『新装版 ピタゴラスの定理 100 の証明法』プレアデス出版，2021年

［３］矢野健太郎 著・茂木勇 増補『モノグラフ 25 数学史 改訂版』科学新興社，1989年

［４］Fukusuke『世界を変えた 数学史図鑑』ナツメ社，2024年

［５］N. Jackson and C. Johnson, Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem, Amer. Math. Monthly 131 (2024), 739-752.